

Шәкір Айдос



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

Интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп. Шешімнің бар болуы

Бұл дәрісте интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған кері есептің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы зерттеледі.

1 Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп**1.1 Есептің қойылымы**

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (1.2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (1.4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ — сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ — сұйықтың қысымы, ал ν және κ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), e(t), K(t)$ белгілі функциялар.

Анықтама 1.1. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. Ω -да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
3. Кез келген $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} + \kappa (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} = \\ & f(t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2, \Omega} ds. \end{aligned} \quad (1.6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Анықтама 1.2. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын

$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Ескерту 1.1. Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [1] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (1.2) теңдеуден бірімәнді қалпына келтіруге болады.

Кері есепті эквивалентті локалды емес тура есепке келтіру

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \quad (1.7)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (1.8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} = e(0); \quad (1.11)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (1.12)$$

Енді (1.1) теңдеуді $\omega(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (1.8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$f(t) = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) := F_1(\mathbf{u}, t). \quad (1.13)$$

Мұнан соң, (1.13) өрнекті (1.1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \\ F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (1.14)$$

теңдеулер жүйесін, (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (1.13) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебін, сәйкесінше, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есепке алып келдік.

Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 1.1. Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі болса, онда $(\mathbf{u}, p)$ жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, $(\mathbf{u}, p)$ функциялары (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (1.13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімін береді.

Ескерту 1.2. (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 1.1 және 1.2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.

Дәлелдеуі 1.1. Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінен (1.14) теңдеуді алуда дәлелденді.

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (1.13) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса, $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (1.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.

Кері жорып, яғни (1.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

$$(\mathbf{u}(t), \omega)_{2,\Omega} = e_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.15)$$

болсын, мұндағы $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (1.10), (1.15) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0, T])$ орындалады, сонымен қатар (1.11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} = e(0).$$

Енді (1.14) өрнекке $\boldsymbol{\omega}$ функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, сонымен бірге (1.15) шартты ескерсек, онда

$$\begin{aligned} & e_1'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \right. \\ & \left. \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} ds \right) (\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} \end{aligned} \quad (1.16)$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (1.8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

және одан $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.

1.2 Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы

Алдағы уақытта 1.1-лемма бойынша (1.1)-(1.5) кері есебінің орнына (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 1.1. Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\kappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2. \quad (1.1)$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні төменде (1.18) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 \leq C, \quad (1.2)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Ескерту 1.3. 1.1-теоремадағы (1.1) шарт (1.5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезінде пайда болды.

Дәлелдеуі 1.2. Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.

Галеркиндік жуықтау. Айталық, $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ функциялары $\mathbf{H}$ кеңістігінің элементтерінен құралған, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортогональ және сызықтық комбинациялары $\mathbf{V}$ кеңістігінде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемі n -ге ($n \in \mathbb{N}$) тең және φ_k , $k = 1, \dots, n$ жүйесінің сызықтық комбинациясынан тұратын $\mathbf{X}^n$ кеңістігін қарастырайық. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін (1.1)-(1.4), (1.13) есептің жуық шешімі келесі түрде ізделінеді

$$\mathbf{u}^n(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \varphi_j(x), \quad \varphi_j \in \mathbf{X}^n, \quad (1.3)$$

мұндағы $c_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$ коэффициенттері белгісіз және төмендегі жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесінің шешімі болып табылады

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}^n(t), \varphi_k)_{2,\Omega} + \varkappa (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} - \\ ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \varphi_k, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \varphi_k)_{2,\Omega} ds + \\ F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \varphi_k)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

мұндағы $k = 1, 2, \dots, n$ және

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{u}^n, t) = \frac{1}{g_0} \left(e'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t^n(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Енді (1.4) ЖДТ жүйесін келесі бастапқы шарттармен толықтырайық

$$\mathbf{u}^n(0) = \mathbf{u}_0^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.6)$$

мұндағы

$$\mathbf{u}_0^n = \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_0, \varphi_j)_{2,\Omega} \varphi_j$$

функциясы $\mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ кеңістігіндегі функционалдық тізбек болып табылады және

$$\mathbf{u}_0^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ әлді жинақты } \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V} \text{-де } n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (1.4)-(1.6) Коши есебінің $[0, t_0]$ аралығында $c_j^n(t)$ шешімі локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін $[0, T_0] \subset [0, T]$ кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы $[0, T_0]$ — априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

Априорлық бағалаулар. (1.4) жүйесінің k -теңдеуін $c_k^n(t)$ және $\frac{dc_k^n(t)}{dt}$ көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, сәйкесінше, келесі теңдіктер алынады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Жоғарыдағы (1.8) және (1.9) теңдіктерді біріктерсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} := \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (1.10)$$

өрнегі алынады. Соңғы (1.10) өрнектің оң жағына Гельдер және Юнг теңсіздіктерін қолданып келесідей бағалайық

$$|I_1| \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds; \quad (1.11)$$

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varepsilon_1} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds; \quad (1.12)$$

$$|I_3| \leq |F_1| \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}}{k_0}.$$

$$\begin{aligned} & \left[|e'(t)| + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} \left(\nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\ & \frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \times \right. \\ & \left. \left(\nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \left(C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + \right. \right. \\
&\left. \left. \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right], \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$$|I_5| \leq \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C^2(\Omega)}{\varepsilon_1} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4. \tag{1.15}$$

Осылайша, алынған (1.11)-(1.15) теңсіздіктерді (1.10) өрнектің оң жағына қойғанда келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\alpha \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\
&C_1 \int_0^t \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) ds + \\
&C_2 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right)^2 + \\
&C_3 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + C_4(t), \tag{1.16}
\end{aligned}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right); \quad \beta := 2 \left(\varkappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varkappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\
C_1 &:= \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\
C_2 &:= \frac{2C^2}{(\nu + \varkappa)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\
C_3 &:= \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\
C_4(t) &:= \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 |e'(t)|^2.
\end{aligned}$$

Енді $\varepsilon_2 = \frac{2e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon_3 = \frac{\sin \varepsilon}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таңдасақ және ε_1 -дің сәйкес мәні үшін $\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2$ теңсіздігінің жоғарғы шекарасын m -нен 2-ге дейін кеңейтуге болады. Алайда, ε_1 саны $m > 2$ болатындай таңдалмауы керек, себебі $\alpha > 0$ болғандығынан $\varepsilon_2 < 2$.

Енді (1.16) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап, (1.7) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздікке келеміз

$$\begin{aligned}
&z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leq \\
&C_5 \int_0^t z^2(s) ds + C_6, \tag{1.17}
\end{aligned}$$

мұндағы

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2;$$

$$C_5 = \max \{C_1 T + C_3; C_2\}; \quad C_6 = \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t C_4(s) ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда (1.17) өрнектен

$$0 \leq t \leq T_1 < T_* := \frac{1}{C_5 C_6}. \quad (1.18)$$

уақыт аралығы үшін келесі бағалау орынды

$$z(t) \leq \frac{C_6}{1 - C_5 C_6 t} \equiv K_1 < \infty. \quad (1.19)$$

Демек, кез келген $t \leq T_1 < T_*$ үшін (1.19) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq K_1. \quad (1.20)$$

(1.20) бағалауды (1.17) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алғанда келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T_1]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_{T_1})}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, \alpha, \beta, T_1, K_1, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Шектік көшу. Жоғарыдағы (1.3) өрнекпен анықталған $\mathbf{u}^n$ жуық шешімі (1.2) априорлық бағалауды қанағаттандырады. Бұдан $\mathbf{u}^n$ тізбегінің $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегі табылып, ол келесі $*$ -әлсіз және әлсіз жинақтылықтардың орынды екенін көруге болады. Ескерер жәйт, шектік көшуді дәлелдеуде ыңғайлылық үшін $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегін $\mathbf{u}^n$ арқылы белгілеуі қолданылады.

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u}_t^n \rightharpoonup \mathbf{u}_t \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

Сонымен қатар, (1.2) априорлық бағалаудан келесі тұжырымдар орынды

$$\mathbf{u}^n \text{ тізбегі } L^2(0, T_1; \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega))\text{-де бірқалыпты шенелген}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{u}_t^n \text{ тізбегі } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де бірқалыпты шенелген}. \quad (1.26)$$

Сонымен бірге, $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ компактiлi енгiзуi және Обэн-Лионс леммасын бойынша келесi әлдi жинақтылық шығады

$$\mathbf{u}^n \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{әлдi жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.27)$$

Айталық, $\zeta(t) \in C_0^\infty([0, T_1])$ болсын. (1.4) өрнекті $\zeta(t)$ функцияға көбейтіп, 0 мен T_1 аралығында интегралдасак, онда төмендегі өрнек орынды

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \varkappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Сондай-ақ, k -ны бекітіп және (1.22)-(1.27) нәтижелерді қолданып, (1.28) өрнектен $n \rightarrow \infty$ шекке көшсек, онда төмендегі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \varkappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Соңғы теңдіктегі конвективті мүше үшін келесі шектік көшуді орынды

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \rightharpoonup (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де,} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.30)$$

Шын мәнінде, (1.30) өрнекті интеграл арқылы жазсақ, онда төмендегі түрде болады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \, d\mathbf{x} dt = \\ & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x} dt - \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

бұл өрнекке Гелдер теңсіздігін (1.2) мен (1.27) өрнектерімен бірге қолданғанда оң жағындағы бірінші интегралдың мәні нөлге жинақтылатынын аңғаруға болады:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x} dt \leq \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})} \leq \\ & \sqrt{C} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \longrightarrow 0, \quad \text{егер } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ал, (1.22) өрнек пен $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(Q_{T_1})$ әсерінен екінші интеграл нөлге барады. Аналогты түрде локалды емес мүше үшін де келесі шектік көшу орынды

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt = \int_0^{T_1} \frac{1}{g_0(t)} \left[e'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \right. \\ & \left. ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n)_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt \rightharpoonup \\ & \int_0^{T_1} F(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt \quad \text{жинақты } L^2([0, T_1])\text{-де, } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Соңғы өрнекте екінші мүше (1.24) өрнектің, үшінші мүше (1.22) өрнектің, бесінші мүше (1.23) өрнектің әсерінен жинақты. Сондай-ақ, бірінші мүше тривиалды түрде, ал төртінші мүше (1.30) өрнектің әсерінен жинақты. (1.29) теңдеу сызықты болғандықтан кез келген $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ функцияларының ақырлы сызықтық комбинациясы мен $\zeta \in C_0^\infty([0, T_1])$ шартын қанағаттандыратын $\varphi\zeta \in \mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})$ функциясы үшін де орынды болып қалады. Мұнымен қоса, (1.29) өрнектегі $[0, T_1]$ аралығындағы интеграл астындағы барлық қосылғыштар t айнымалысы бойынша үзіліссіз функция болып табылады. Демек, барлық дерлік $t \in [0, T_1]$ және $\varphi \in \mathcal{V}$ үшін келесі интегралдық теңдік алынды

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mathbf{u}_t(t) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t)] \varphi d\mathbf{x} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \varphi)_{2, \Omega} + \\ & \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \varphi)_{2, \Omega} = \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \varphi)_{2, \Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g}(t) \varphi d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.1-Теореманың дәлелдеуі аяқталды.

1.3 Кері есептің әлді шешімінің бар болуы

Бұл бөлімшеде қарастырылып отырған кері есептің әлді шешімінің бар болуы зерттелінеді.

Теорема 1.2. Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шарт орынды болсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega). \quad (1.1)$$

Олай болса, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (1.2) бағалауға қоса

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (1.2)$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні (1.18) өрнектен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі 1.3. Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есеп үшін

$$\tilde{\Delta} \varphi_k := -\mathbb{P} \Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k(x) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \quad (1.3)$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды [2], [3].

Олай болса, әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 1.2-теореманы толық дәлелдеу үшін $\Delta \mathbf{u}^n$ мен $\Delta \mathbf{u}_t^n$ -ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.

Сөйтіп, (1.4) өрнекті $\lambda_k \frac{dc_k^n(t)}{dt}$ -ға көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, онда келесі өрнек шығады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \left((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}^n(t), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right) - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) \left(\mathbf{g}, -\tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} \equiv I_6, \end{aligned} \quad (1.4)$$

мұндағы $F(\mathbf{u}^n, t)$ функциясы (1.5) өрнегімен анықталады және төмендегі бағалауды қанағаттандырады

$$\begin{aligned} |F_1|^2 \leq & \frac{5}{k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \left(\varkappa^2 \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + \nu^2 \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. C^4(\Omega) \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2 \int_0^t \left\| \mathbf{u}^n(s) \right\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.5) бағалауды бірге қолданып, I_6 -ті бағалайық

$$\begin{aligned} |I_6| \leq & \frac{\varkappa}{2} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ & \left. K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \left\| \mathbf{g}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

(1.6) бағалауды (1.4) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\begin{aligned} & \nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{3}{\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ & \left. \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \left\| \mathbf{g}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Енді (1.7) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_8 + C_9 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.8)$$

мұндағы

$$C_8 := \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int_0^{T_1} |F_1(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_9 := \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0, T_1]} \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty.$$

Мұнан кейін, (1.8) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_8 e^{C_9 T_1}, \quad \forall t \in (0, T_1) \quad (1.9)$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.8) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алып және (1.9) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})}^2 \leq C := C(\nu, \kappa, C_8, C_9, T_1) < \infty. \quad (1.10)$$

Список литературы

- [1] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh. The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity 34 (2021), no. 5, 3083–3111. 1.1
- [2] O.A. Ladyzhenskaya, On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897. 1.3
- [3] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970. 1.3